E-school di Arrigo Amadori

Analisi I

Serie di potenze

01 – Introduzione.

Le serie di potenze sono molto importanti perché costituiscono il punto di partenza per approssimare una funzione qualunque. Sono anche alla base della teoria delle funzioni analitiche, una importante classe di funzioni nel campo complesso.

Le serie di potenze si rifanno ai concetti già introdotti di serie di funzioni e di numero complesso. Tutti i concetti di convergenza già visti per le serie di funzioni vengono estesi di conseguenza alle serie di potenze.

02 – Serie di potenze in C.

Sia an una successione di numeri complessi (appartenenti a C) con n appartenente ad I+ U {0} (n = 0, 1, 2, …) . Sia z appartenente a C . Si definisce **serie di potenze** la serie :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Se la serie converge in C , il limite a cui tende si chiama somma della serie.

Applicando alle serie di potenze i concetti già visti in precedenza, possiamo riassumere :

- 1 - una serie di potenze **converge** se e solo se

$$\forall \varepsilon \in R^+ \exists n(\varepsilon) \in N \ni \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k z^k \right| < \varepsilon, \forall n \in N, n > n(\varepsilon), \forall p \in N$$

- 2 - se una serie di potenze converge allora an * z • à 0 per n à ∞ in C ovvero |an * z •| à 0 per n à ∞ in R .

- 3 - una serie di potenze si dice **assolutamente convergente** se è convergente in R la serie :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| a_n z^n \right|$$

- 4 - una serie di potenze assolutamente convergente è anche convergente, il viceversa non è vero.

- 5 - una serie di potenze si dice **uniformemente convergente** su un sottoinsieme A di C se è convergente in ogni punto di A e se la sua somma f(z) è tale per cui :

$$\forall \varepsilon \in R^+ \exists n(\varepsilon) \in N \ni \left| f(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \right| < \varepsilon, \forall n \in N, n > n(\varepsilon), \forall z \in A$$

- 6 - una serie di potenze è uniformemente convergente su A sottoinsieme di C se e solo se :

$$\forall \varepsilon \in R^+ \exists n(\varepsilon) \in N \ni \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k z^k \right| < \varepsilon, \forall n \in N, n > n(\varepsilon), \forall p \in N, \forall z \in A$$

- 7 - una serie di potenze è **totalmente convergente** su un sottoinsieme A di C se la serie :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup \left\{ \left| a_n z^n \right|; z \in A \right\}$$

è convergente in R .

- 8 - una serie di potenze totalmente convergente è anche uniformemente convergente, il viceversa è falso.

03 –Insiemi di convergenza.

Data una serie di potenze qualunque risulta naturale chiederci quale è l’insieme dei punti di C per i quali la serie converge.

Siccome i numeri complessi possono essere visualizzati sul piano rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano ortogonale in modo che z = x + iy (dove x è la parte reale del numero complesso ed y la parte immaginaria), risulta molto conveniente riferire le proprietà delle serie di potenze al piano cartesiano.

Allo scopo è di fondamentale importanza il **teorema di Cauchy-Hadamard** con il quale si determina un cerchio (nella rappresentazione cartesiana dei numeri complessi) centrato nell'origine per tutti i punti del quale (con eccezione dei punti sulla circonferenza di cui non si fa alcuna affermazione) la serie di potenze sicuramente converge mentre non converge per i punti esterni al cerchio. Il suddetto cerchio si chiama **cerchio di convergenza** ed il suo raggio, **raggio di convergenza** della serie di potenze.

Il teorema (di cui omettiamo la dimostrazione) afferma che data la serie di potenze :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

ed il limite L reale finito od infinito della successione :

$$\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} = L$$

si possono avere tre casi :

- 1 - L = +∞ à raggio di convergenza ρ = 0
à la serie di potenze converge solo per z = 0

- 2 - L > 0 à raggio di convergenza ρ = 1 / L
à la serie di potenze converge per ogni z per cui |z| < ρ (cerchio di centro 0 e raggio ρ esclusa la circonferenza) , e non converge per i punti per cui |z| > ρ (punti esterni al cerchio ed alla circonferenza) (sui punti della circonferenza |z| = ρ non si fa alcuna affermazione)

- 3 - L = 0 à raggio di convergenza ρ = ∞
à la serie di potenze converge per ogni punto di C

Nel caso in cui :

$$\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Il limite può essere semplificato con l'utilizzo del logaritmo (si utilizza il limite del logaritmo della radice ennesima invece della radice ennesima medesima, dove è an ≠ 0) e del teorema di Cesaro (omettiamo la dimostrazione) :

$$\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|}$$

Esempi :

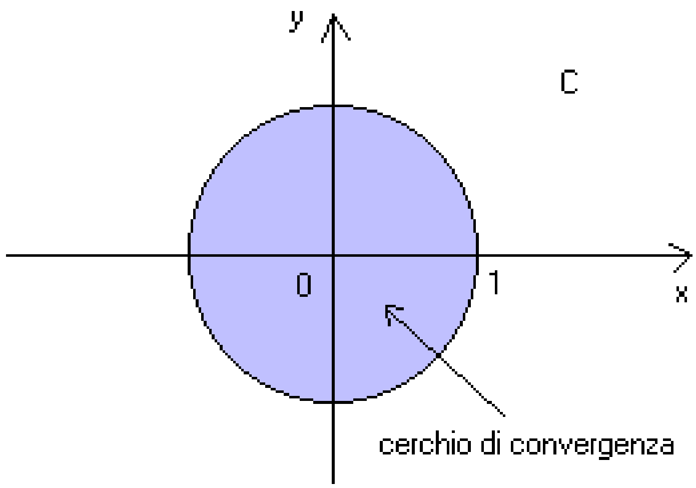
- 1 - la serie di potenze (vedi la serie geometrica definita nel capitolo Successioni e serie reali) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

ha coefficienti an = 1 per cui il raggio di convergenza è ρ = 1 essendo :

$$\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|1|} = 1$$

graficamente :



- 2 - la serie di potenze :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

(dove n ! = 1 * 2 * 3 * … * n è il fattoriale di n) ha raggio di convergenza ρ = ∞ , quindi converge per ogni numero z complesso. Infatti (utilizzando la formula semplificata) :

$$\lim_{n\to\infty} \sup \log\left(\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n!}\right|}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n-1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

onde il raggio di convergenza è infinito.

- 3 - la serie di potenze :

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$$

ha raggio di convergenza $\rho = 0$ in quanto :

$$\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{n^n} = \lim_{n\to\infty} n = +\infty$$

per cui converge solo per $z = 0$.

Nel caso in cui $\rho > 0$ grazie al teorema di Cauchy-Hadamard possiamo affermare che la serie di potenze converge dentro il cerchio di convergenza e non converge fuori dal cerchio di convergenza. Il teorema non afferma nulla sui punti della circonferenza del cerchio di convergenza, ovvero per $|z| = \rho$.

Il seguente teorema descrive, in certe condizioni, il comportamento della serie di funzioni sui punti della circonferenza del cerchio di convergenza. Il teorema afferma (omettiamo la dimostrazione) :

sia data l'usuale serie di potenze ed abbia raggio di convergenza $\rho > 0$. Sia

$S = \{z$ appartenente a C ; $|z| = \rho \}$

l'insieme dei punti sulla circonferenza del cerchio di convergenza. In generale la serie di potenze converge in un sottoinsieme di S .

In particolare, se $\rho = 1$ e se la serie :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$$

converge e se an à 0 in C per n à ∞ , allora la serie di potenza converge per ogni punto di $S - \{1\}$.

La condizione che $\rho = 1$ non è restrittiva perché ogni serie di potenze con $\rho > 0$ (finito) può essere trasformata in una serie di potenze con $\rho = 1$ facendo la sostituzione $z = \rho * w$ (la dimostrazione di ciò è immediata).

Esempio :

consideriamo la serie di potenze :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} z^n$$

essendo :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{(n-1)+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

il raggio di convergenza della serie di potenze è $\rho = 1$.

Si ha anche :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

La serie :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{(n+1)+1} - \frac{1}{n+1} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{n+1-n-2}{(n+1)(n+2)} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

converge perché la serie dell’ultimo termine possiede una maggiorante convergente ($\sum(1/n^2)$) . Infatti :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\textit{perché}$$

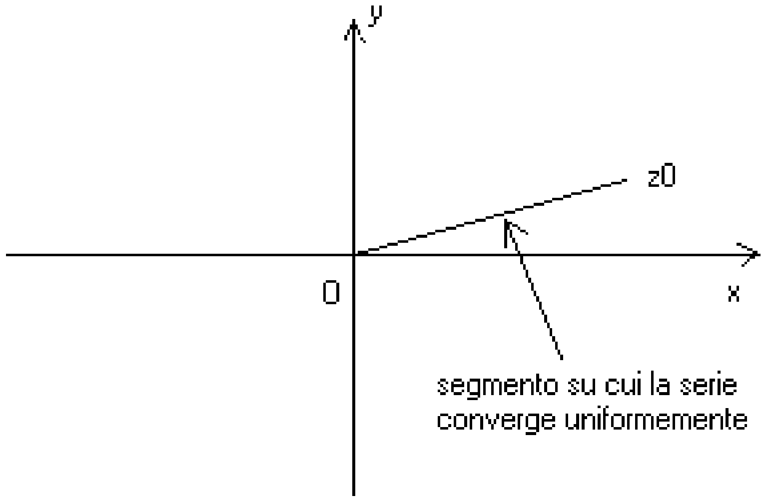
$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} < \frac{1}{n^2}$$

Valgono perciò le condizioni richieste dal teorema per cui possiamo affermare che la serie di potenze in questione converge nel cerchio di convergenza $|z| < 1$ e sulla circonferenza

$|z| = 1$ con esclusione di $z = 1$.

Per approfondire lo studio della convergenza di una serie di potenze, occorre tenere in considerazione anche l'importante **teorema di Abel** che afferma (omettiamo la dimostrazione) :

sia data la usuale serie di potenze. Se essa converge in z0 appartenente a C , allora essa converge uniformemente nell'insieme $\{z ; z = t * z0 , 0 \leq t \leq 1\}$ che rappresenta nel piano cartesiano un segmento di estremi 0 e z0 :



04 – Derivata complessa.

Nei punti del sottoinsieme A di C in cui una serie di potenze converge, la somma della serie costituisce una **funzione complessa** di dominio A . Si ha quindi :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n , z \in A$$

Così come per le funzioni numeriche reali, anche per le funzioni complesse si definisce la **derivata** nel punto z0 appartenente a A (dominio della funzione f) allo stesso modo :

$$f'(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Essendo come per le funzioni reali :

$$\frac{d}{dz} z^n = n z^{n-1}$$

e continuando a valere le comuni regole di derivazione, facendo la derivata della serie di potenze si ottiene :

$$f'(z) = \frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 1a_1 z^0 + 2a_2 z^1 + 3a_3 z^2 + 4a_4 z^3 \ldots + n a_n z^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

La derivata di una serie di potenze è una serie di potenze che ha lo stesso raggio di convergenza della serie data (omettiamo la semplice dimostrazione).

Inoltre una serie di potenze può essere derivata successivamente in tutti i punti in cui essa converge :

$$f''(z) = 2a_2 z^0 + 6a_3 z^1 + 12a_4 z^2 \ldots + n(n-1)a_n z^{n-2} + \ldots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n z^{n-2}$$

$$f'''(z) = 6a_3 z^0 + 24a_4 z^1 + \ldots + n(n-1)(n-2)a_n z^{n-3} + \ldots = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)a_n z^{n-3}$$

$ecc.\quad ecc.$

e tutte le derivate hanno raggio di convergenza uguale alla serie di potenze iniziale.

Osservando la forma delle serie di potenza data e delle sue derivate si può fare una importante osservazione. Supponiamo di calcolare la serie di potenze e le sue derivate nel punto $z = 0$.
Si ottiene così :

$$f(0) = a_0$$

$$f'(0) = a_1$$

$$f''(0) = 2a_2$$

$$f'''(0) = 6a_3$$

$$\ldots$$

$$f^{(n)}(0) = n! a_n$$

Si ricava così l’importante formula :

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) \quad , n \in I^+ \bigcup \{0\}$$

che è alla base dello sviluppo in serie di Taylor.

Fine.

Pagina precedente

Home page